



*The Fifth International Conference*  
SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE  
*CHERNOGOLOVKA, August 4, 2009*

# **Accuracy of the averaged description of the charged particles motion in high- frequency fields**

*G.M. Fraiman, V.I. Geyko*  
**Institute of Applied Physics RAS**  
**Nizhny Novgorod**

## Motivation

**Last year marked the 50<sup>th</sup> anniversary of the famous publication by Gaponov and Miller on the averaged description of the motion of charged particles in smoothly inhomogeneous fields. Since that time a lot of attempt have been made by various authors to find the range of validity of such approximation. Unfortunately, no answer to this question have been found so far. In solving differential equations, it was impossible to advance farther than the second or third approximation, first of all because the arising expressions were too cumbersome. In this work we offer another approach for perturbation theory.**

Gaponov A.V., Miller M.A., *Potential wells for charged particles in a high-frequency electromagnetic fields*, SOVIET PHYSICS JETP-USSR, Vol. 7, Iss. 1, pp. 168-169, 2008.

V. I. Geyko and G. M. Fraiman, *Accuracy of the averaged description of the motion of charged particles in high-frequency fields*, JETP, Vol. 107, No. 6, pp. 960–964, 2008.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Э. И. Ринбу, который обратил мое внимание на незаконность выводов, сделанных в работе [1] из соотношения (22).

Институт полупроводников  
Академии наук СССР

Получило в редакцию  
октября 1957 г.

#### Литература

- [1] Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ, 32, 1350, 1957.  
[2] C. Herring, Phys. Rev., 62, 361, 1937.  
[3] Ю. А. Фирсов, ЖТФ, 27, 2212, 1957.

### О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЯМАХ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. В. Гапонов, М. А. Миллер

Как известно, в электростатическом поле в областях, свободных от источников, не существует абсолютных максимумов и минимумов потенциала, что исключает возможность пребывания заряженной частицы в состоянии устойчивого равновесия (теорема Ирншоу). Тем самым исключается и возможность локализации частицы, если под локализацией понимать такое состояние, при котором частица с энергией, меньшей некоторой заданной величины, не может выйти за пределы ограниченной области ни при каких начальных условиях.

Это утверждение не распространяется на случай высокочастотного электромагнитного поля, где локализация частицы, как будет показано ниже, осуществима.

Рассмотрим частицу с зарядом  $e$  и массой  $m$ , движущуюся во внешнем электромагнитном поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ . В нерелятивистском приближении уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \eta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\eta/c) [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

где  $\eta = e/m$ . При достаточно большой частоте внешнего поля  $\omega$  решение уравнения (1) можно представить в виде суммы медленно меняющейся (в масштабе периода колебаний внешнего поля) функции  $\mathbf{r}_0(t)$  и осциллирующей (с частотой  $\omega$ ) функции  $\mathbf{r}_1(t)$ . Считая, что  $|\mathbf{r}_1(t)|$  значительно меньше расстояния  $L$ , на котором амплитуда внешнего поля существенно изменяется,

$$|\mathbf{r}_1(t)| \ll L, \quad (2)$$

и пренебрегая членами порядка  $|\mathbf{r}_1/L|$  и  $|\dot{\mathbf{r}}_0/L|$ , после усреднения (1) по периоду высокочастотного поля получим уравнение для  $\mathbf{r}_0'(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0(t) = -\nabla\Phi, \quad \Phi = (\eta/2\omega)^2 |\mathbf{E}|^2. \quad (3)$$

Таким образом, средняя по времени сила, действующая на частицу, потенциальна, причем потенциал силы пропорционален квадрату модуля электрической напряженности и не зависит от знака заряда.

Существует неограниченное число возможностей построения потенциальных ям для  $\Phi(\mathbf{r})$ . Простейшие из них реализуются в квазиэлектростатических мультипольных полях

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \{r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi\} e^{i\omega t}$$

где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты,  $P_n^m$  — присоединенные полиномы Лежандра. Например, потенциал  $\Phi$  в поле аксиального квазистатического квадрупольного ( $m=0, n=2$ ) имеет вид  $\Phi = \text{const } r^2 (1 - 3\cos^2 \theta)$ , т. е. обладает абсолютным минимумом в начале координат<sup>1</sup>.

Для выяснения характера движения частицы внутри потенциальной ямы рассмотрим первый интеграл уравнения (3):

$$\frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{\eta^2}{2\omega^2} |\mathbf{E}|^2) = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_1|^2) = \text{const} = |e| V_0. \quad (4)$$

Левая часть (4) равна средней по времени кинетической энергии частицы, причем кинетическая энергия осцилляционного (с частотой  $\omega$ ) движения играет роль потенциальной энергии.

Если в центре потенциальной ямы поле  $\mathbf{E} = 0$ , то частицы с энергией, меньшей или равной  $V_0$ , локализируются внутри области, на границе которой выполнены условия]

$$L\omega^2 / |\eta| \gg |\mathbf{E}| > 2\omega (V_0 / |\eta|)^{1/2}.$$

Заметим, наконец, что для построения потенциальных ям можно использовать одновременно поля различных частот [1]; тогда при усреднении (1) за достаточно большой промежуток времени потенциал  $\Phi$  в уравнении (3) будет иметь вид

$$\Phi = (\eta^2/4) \sum_n (|\mathbf{E}_n| / \omega_n)^2.$$

Благодаря этому оказывается возможным формирование трехмерных потенциальных ям из одномерных и двумерных. Последние представляют самостоятельный интерес как средство фокусировки прямолинейных пучков заряженных частиц [2, 3].

Горьковский государственный  
университет

Получило в редакцию  
15 октября 1957 г.

#### Литература

- [1] F. V. Knoch, Austr. Journ. of Physics, 10, 221, 1957.  
[2] В. С. Ткалич, ЖЭТФ, 32, 625, 1957.  
[3] М. А. Миллер, Сообщение на II Всесоюзной конференции МВО по радиоэлектронике, Саратов, 1957.

<sup>1</sup> Интересно отметить, что для аксиально-симметричного квадрупольного поля исходное уравнение (1) в декартовых координатах сводится к трем уравнениям Матье; это позволяет проанализировать свойства решения без ограничения (2).

### К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ДЕ ГААЗА — ВАН АЛЬФЕНА ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Г. Е. Зильберман

В работах [1-3] развита теория движения электрона с произвольным законом дисперсии  $E(\mathbf{k})$  в кристалле, находящемся в однородном магнитном поле. Магнитная восприимчивость  $\chi$  коллектива таких электронов осциллирует при изменении напряженности  $H$  магнитного поля (эффект де Гааза — ван Альфена). Если изоэнергетическая поверхность в  $k$ -пространстве, определяемая уравнением  $E(\mathbf{k}) = \text{const}$ , является замкнутой, период осцилляций определяется [1-3] величиной экстремального сечения  $S_m$  изоэнергетической поверхности плоскостью, перпендикулярной  $H$ . Если же

*POTENTIAL WELLS FOR CHARGED PARTICLES IN A HIGH-FREQUENCY ELECTRO-MAGNETIC FIELD*

A. V. GAPONOV and M. A. MILLER

Gor'kii State University

Submitted to JETP editor October 15, 1957

J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 34, 242-243  
(January, 1958)

AS is well known, in source-free regions of an electrostatic field there can be no absolute maxima or minima of the potential; this fact excludes the possibility of maintaining a charged particle in a state of stable equilibrium (Earnshaw's theorem). This same situation also excludes the possibility of localizing particles, if by localization we mean a state in which a particle with energy smaller than some given magnitude cannot go beyond the limits of a bounded region, no matter what the initial conditions.

The above statement does not apply in the case of a high-frequency electromagnetic field where, as we shall show below, localization of particles can be accomplished.

Consider a particle of charge  $e$  and mass  $m$  moving in an external electromagnetic field  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ . In the nonrelativistic approximation the equation of motion is

$$\ddot{\mathbf{r}} = \eta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\eta/c) \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

where  $\eta = e/m$ . If the frequency of the external field  $\omega$  is sufficiently high, the solution of Eq. (1) can be written as a sum of a slowly varying (in terms of the oscillation period of the external field) function  $\mathbf{r}_0(t)$  and an oscillating function  $\mathbf{r}_1(t)$  (frequency  $\omega$ ). Assuming that  $\mathbf{r}_1(t)$  is much smaller than the distance  $L$  over which the amplitude of the external field changes markedly,

$$|\mathbf{r}_1(t)| \ll L, \quad (2)$$

and neglecting terms of order  $|\mathbf{r}_1/L|$  and  $|\dot{\mathbf{r}}_0/L|$ , averaging Eq. (1) over the period of the high-frequency field we obtain an equation for  $\mathbf{r}_0(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0(t) = -\nabla\Phi, \quad \Phi = (\eta/2\omega)^2 |\mathbf{E}|^2 \quad (3)$$

Thus, the time average of the force acting on the particle is derivable from a potential; the potential is proportional to the square of the modulus of the electric intensity and is independent of the sign of the charge.

There are an unlimited number of possibilities for creating potential wells  $\Phi(\mathbf{r})$ . The simplest of these are realized in quasi-electrostatic multipole fields

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \{r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi\} e^{i\omega t},$$

where  $r$ ,  $\theta$ , and  $\varphi$  are the spherical ordinates and the  $P_n^m$  are the associated Legendre polynomials. For example, the potential  $\Phi$  in the field of a quasi-static axial quadrupole ( $m = 0$ ,  $n = 2$ ) is of the form  $\Phi = \text{const } r^2(1 + 3 \cos^2 \theta)$ ,

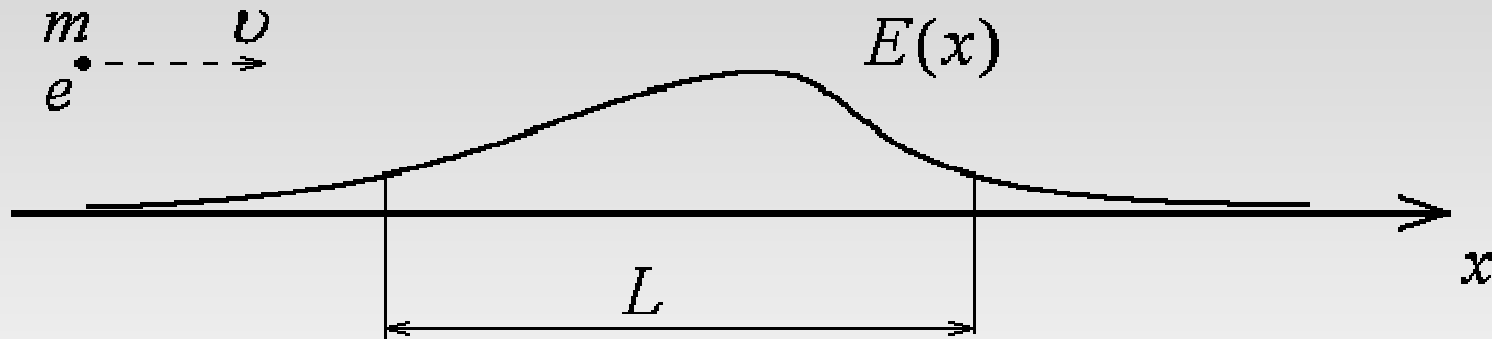
# Overview

- ▶ **1-D problem**
  - **Transit particles (no reflection points)**
  - **Lindstedt's method**
  - **Superconvergence**
  - **Standard averaging technique**
  
- ▶ **3-D problem**
  
- ▶ **Relativistic corrections**

## Problem description

1-D motion equation of the particle

$$m\ddot{x} = eE(x)\sin(\omega t)$$



Averaged description

$$\frac{(\dot{x}_d)^2}{2} + \frac{e^2 E^2(x_d)}{4m^2 \omega^2} = \text{const}$$

Ponderomotive potential and force

$$\Phi = \frac{e^2 E^2(x_d)}{4m^2 \omega^2} \quad F = -\nabla \Phi$$

## Transit particles

$x(t)$  is monotonic function  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_d}{dt} + \frac{dx_{\sim}}{dt} > 0$  or  $v_d > v_{\sim}$

coordinates and momenta

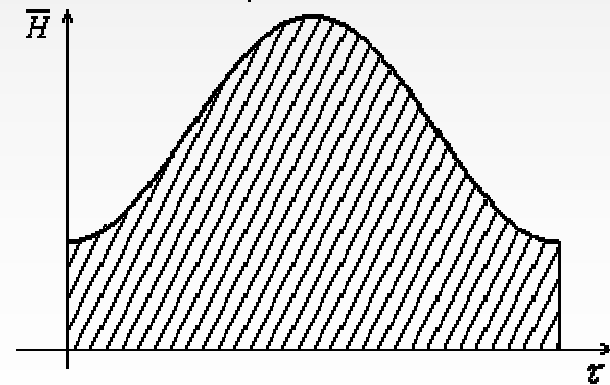
$$x, p \longrightarrow \tau, \bar{H}$$

Hamiltonian and time

$$\bar{H} = \frac{(p - \varepsilon f(x) \cos(\tau))^2}{2}, \tau \longrightarrow p = \sqrt{2\bar{H}} + \varepsilon f(x) \cos(\tau), x$$

Adiabatic invariant

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{H} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (p - \varepsilon f(x) \cos(\tau))^2 d\tau = \frac{p^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 f^2(x)}{4}$$



new action and angle  $J, \tau \rightarrow \bar{J}, \theta$

canonical transformation

$$S = \int \bar{H} d\tau = \int \left( \frac{p^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 f^2(x)}{4} + \frac{\varepsilon^2 f^2(x)}{4} \cos(2\tau) - \varepsilon p f(x) \cos(\tau) \right) d\tau$$

new Hamiltonian and adiabatic invariant

$$\bar{p} = \sqrt{2J - \frac{\varepsilon^2 f^2}{2}} - \frac{\varepsilon^2 f f'}{4} \sin(2\vartheta) - \varepsilon f' \sin(\vartheta) \sqrt{2J - \frac{\varepsilon^2 f^2}{2}} + O(\varepsilon^3)$$

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \bar{p} + \frac{\varepsilon^2 f f' \sin(2\vartheta)}{4} \right)^2 \cdot (1 - \varepsilon f' \sin(\vartheta))^{-2} + \frac{\varepsilon^2 f^2}{2} \right\} d\vartheta =$$

$$= \frac{\bar{p}^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 f^2}{4} + \frac{\varepsilon^4 (f f')^2}{64} + \frac{3}{4} \bar{p}^2 f'^2$$

the same result  
for corrections



## Hamiltonian approach

$$\dot{X} = p / m \quad \dot{p} = eE(X) \sin(\omega t)$$

**Hamiltonian**

**Dimensionless variables**

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2m} - e \sin(\omega t) \int_{-\infty}^x E(y) dy$$

↓

$$\tau = \omega t \quad x = \frac{X}{L} \quad \bar{p} = \frac{p}{m\omega L}$$

$$\underline{\varepsilon = \frac{e|E_{MAX}|}{mL\omega^2} = \frac{r_{MAX}}{L}} \quad f(y) = \frac{E(X)}{|E_{MAX}|} \quad H = \frac{\tilde{H}}{m(\omega L)^2}$$

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2} - \varepsilon \sin \tau \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

**small parameter**

**Exact canonical transformation**

$$(x, \bar{p}) \rightarrow (x, P = \bar{p} + \varepsilon f(x) \cos(\tau))$$

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2} - \varepsilon \sin \tau \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad \longrightarrow \quad \bar{H} = \frac{(P - \varepsilon f(x) \cos \tau)^2}{2}$$

## Lindstedt's method

$$H = \frac{1}{2} (P - \varepsilon f(x) \cos(\tau))^2 = H_0(x, P) + H_{\sim}(x, P, \tau)$$

**drift Hamiltonian**

$$H_0 = \frac{P^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{f^2(x)}{4} \longrightarrow P \propto \varepsilon$$

**quiver Hamiltonian**

$$H_{\sim} = -\varepsilon P f(x) \cos(\tau) + \varepsilon^2 f^2(x) \cos(2\tau) / 4$$

$\swarrow$   
 $\propto P\varepsilon \propto \varepsilon^2$

$\swarrow$   
 $\propto \varepsilon^2$

**Canonical transformation in leading order in**

**Basic idea**

$$H = H_0(x, P) + H_{\sim}(x, P, \tau) \qquad H_{\sim} \propto \varepsilon^2$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0(\bar{x}, \bar{P}) + \bar{H}_{\sim}(\bar{x}, \bar{P}, \tau) \qquad \bar{H}_{\sim} \propto \varepsilon^3$$

$$\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{H}}_0(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{P}}) + \bar{\bar{H}}_{\sim}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{P}}, \tau) \qquad \bar{\bar{H}}_{\sim} \propto \varepsilon^4$$

$$\bar{\bar{\bar{H}}}_{\sim} = H_{\sim}^{(n)}$$

**Generating function**

$$F = x\bar{P} + S^{(n)}(x, \bar{P}, \tau)$$

**New canonical coordinates  
and momenta**

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\partial F}{\partial \bar{P}} = x + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \bar{P}} \\ P = \frac{\partial F}{\partial x} = \bar{P} + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial x} \end{cases}$$

**New Hamiltonian**

$$\bar{H} = H_0(x, P) + H_{\sim}^{(n)}(x, P, \tau) + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \tau} = H_0\left(\bar{x} - \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \bar{P}}, \bar{P} + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial x}\right) + H_{\sim}^{(n)}\left(\bar{x} - \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \bar{P}}, \bar{P} + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial x}, \tau\right) + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \tau}$$

Combine all quiver terms in the leading order of  $\mathcal{E}$

$$\{\cancel{S^{(n)}}, \cancel{H_0}\} + \frac{\partial S^{(n)}}{\partial \tau} + H_{\sim}^{(n)} = 0 \quad \{\dots, \dots\} - \text{Poisson bracket}$$

**small correction because  $P \propto \mathcal{E}$**

**Local transformation**  $\begin{cases} x^{(n)} = \dots = \bar{x} = x \\ P^{(n)} = \dots = \bar{P} = P \end{cases}$  **when field is zero**  $x = \pm\infty$

$$H_0 = \frac{P^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{f^2(x)}{4} \qquad H_{\sim} = -\varepsilon P f(x) \cos(\tau) + \varepsilon^2 f^2(x) \cos(2\tau) / 4$$



**after one step**

$$\bar{H}_0 = \frac{\bar{P}^2}{2} \left( 1 + \varepsilon^2 \frac{3(f'(\bar{x}))^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon^2 f^2(\bar{x})}{4} + \varepsilon^4 \frac{(f(\bar{x})f'(\bar{x}))^2}{64} + \varepsilon^4 \frac{(f^3(\bar{x})f''(\bar{x}))}{16}$$

**General structure of  $H_{\sim}^{(n)}$  is**

$$H_{\sim}^{(n)} = O(\varepsilon) \bar{P}^{n+1} f^{(n)}(\bar{x}) Q_1(\tau) + O(\varepsilon^2) G_2(\bar{x}) Q_2(\tau) + O(\varepsilon^3) \dots$$

$$\swarrow \infty \varepsilon^{n+1} n! \quad \longrightarrow$$

**The procedure  
does not  
converge**

where  $Q_i(\tau)$  - pure oscillatory function  
 $G_i(\bar{x})$  - coordinate function

**Field in power '1' never goes away**

## Energy exchange

$$\Delta W = \Delta \left( \frac{p^2}{2} \right) = \Delta (H^{(0)}) = \Delta (H^{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_{\sim}^{(n)}}{\partial t} dt$$

because transformation is local

in the order  $\varepsilon^1$

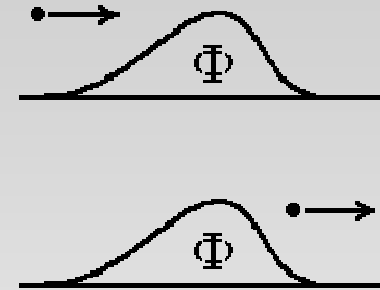
$$\Delta W = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t) P_d^{n+1}(t) f^{(n)}(x_d(t)) dt$$

$x_d(t)$  and  $P_d(t)$  are drift trajectory of n-th order approximation

Integrating by part obtain

$$\Delta W = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) P_d(t) f(x_d(t)) dt$$

as if we used quiver Hamiltonian of the first approximation,  
but trajectory of n-th approximation



# Superconvergence method

Let  $\bar{P}$  be independent

Generating function

$$F = x\bar{P} + \varepsilon S(x, \bar{P}, \tau)$$

New canonical coordinates  
and momenta

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\partial F}{\partial \bar{P}} = x + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \bar{P}} \\ P = \frac{\partial F}{\partial x} = \bar{P} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial x} \end{cases}$$

Eliminate all quiver terms in the order  $\varepsilon$

$$\{S, H_0\} + \frac{\partial S}{\partial \tau} + H_{\sim} = 0$$

keep this bracket

Characteristics of this  
equation are drift  
trajectories of  $H_0$

Generating function

$$S(x, \bar{P}, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} H_{\sim}(x_d(x, \bar{P}, t'), p_d(x, \bar{P}, t'), t') dt'$$

## Generating function

$$S(x, \bar{P}, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \cos(t) \bar{P} f(x + \bar{P}(t - \tau)) dt$$

zeroth-order  
approximation

## Series representation

$$S(x, \bar{P}, \tau) = \bar{P} \sin(\tau) f(x) + \bar{P}^2 \cos(\tau) f'(x) + \dots$$

$\propto \varepsilon^{n+1} n!$

like we had before, but now it **converges**

**However,**  
**this transformation**  
**is not local**

$$S(x, \bar{P}, \tau = \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\sim}(x_d(x, \bar{P}, t'), p_d(x, \bar{P}, t'), t') dt' \neq 0$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \bar{P}} \neq x \\ P = \bar{P} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial x} \neq \bar{P} \end{cases}$$

**even when field is zero**  $x = \pm\infty$

**Transformation 'knows' about whole trajectory**

## New Hamiltonian

$$\bar{H} = \frac{\bar{P}^2}{2} \left( 1 + \varepsilon^2 \frac{3f''^2(\bar{x})}{2} \right) + \varepsilon^2 \frac{f^2(\bar{x})}{4} + \varepsilon^2 \bar{H}_\sim$$

$$\bar{H}_\sim = \frac{f^2(\bar{x}) \cos(2\tau)}{2} + \frac{\bar{P}f'(\bar{x})f(\bar{x}) \sin(2\tau)}{2} + \dots$$

## Superconvergence

**Initial problem**

$$H = H_0(x, P) + \varepsilon H_\sim(x, P, \tau)$$

**After one canonical transformation**

$$\bar{H} = \bar{H}_0(\bar{P}, \bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{H}_\sim(\bar{P}, \bar{x}, \tau, \varepsilon)$$

**Formal replacement**

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^2$$

**Next canonical transformation**

$$\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{H}}_0(\bar{\bar{P}}, \bar{\bar{x}}, \varepsilon) + \varepsilon^4 \bar{\bar{H}}_\sim(\bar{\bar{P}}, \bar{\bar{x}}, \tau, \varepsilon)$$

After  $n$  steps quiver Hamiltonian is in order of  $\varepsilon^{2^n}$



## Energy exchange

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_{\sim}}{\partial \tau} d\tau$$

because the transformation is not local

$$\Delta H = \frac{P_{\infty}^2}{2} - \frac{P_0^2}{2} \propto \varepsilon^1$$

$$\Delta \bar{H} = \frac{\bar{P}_{\infty}^2}{2} - \frac{\bar{P}_0^2}{2} \propto \varepsilon^2$$

for new Hamiltonian

The new and old canonical momenta differ in order  $\varepsilon$

$$P_{\infty} = \bar{P}_{\infty} + \varepsilon \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\infty} = \bar{P}_{\infty} + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} P_d(t) \cos(t) f'(x_d(t)) dt$$

energy exchange is here

In case of adiabatically smooth field profile the energy change is exponentially small

$$\Delta H \propto \varepsilon \bar{P} \exp\left(-\frac{1}{\bar{P}}\right) \propto \frac{eE_{MAX} v}{\omega} \exp\left(-\frac{\omega L}{v}\right)$$

# General averaged description

coordinate transformation

small parameters

$$x = x_d(t) + x_{\sim}(x_d, \omega t)$$

$$|\dot{b}_n| \ll \omega |b_n| \rightarrow$$

$$\mu = \frac{\dot{x}_d}{\omega L} \ll 1$$

$$x_{\sim}(x_d, \omega t) = \sum_{n \neq 0} b_n(x_d) \exp(i\omega n t)$$

$$|b_{|n|+1}| \ll |b_{|n|}| \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{x_{\sim}}{L} = \frac{eE}{mL\omega^2} \ll 1$$

**Taylor series**  $E(x) = E(x_d + x_{\sim}) = E(x_d) + \sum_k \frac{1}{k!} \frac{d^k E(x_d)}{dx_d^k} x_{\sim}^k$

after averaging

$$\frac{(\dot{x}_d)^2}{2} \left( 1 - \frac{3e^2 E'^2}{2m^2 \omega^4} \right) + \frac{e^2 E^2}{4m^2 \omega^2} + \frac{e^4}{64m^4 \omega^6} (E^2 E'^2) + \frac{e^4}{16m^4 \omega^6} (E^3 E'') = H$$

$\downarrow$   
 $\varepsilon^2$

$\downarrow$   
 $\Phi$

$\downarrow$   
 $\varepsilon^2 \Phi$

$\downarrow$   
 $\varepsilon^2 \Phi$

## 3-D problem

### 3-D Hamiltonian

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e\vec{a}(\vec{r})\cos(\omega t)}{c} \right)^2$$

Similar to 1-D Hamiltonian

$$\bar{H} = \frac{(p - \varepsilon f(x)\cos(\tau))^2}{2}$$

small parameter

$$\varepsilon = \frac{e|A_{\max}|}{m\omega cL}$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

### Zero-th order generating function

$$S(\vec{r}, \vec{P}_d, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \cos(t) \vec{P}_d \vec{a}(\vec{r} + \vec{P}_d(t - \tau)) dt$$

### New drift Hamiltonian

$$H_d = \frac{\vec{P}_d^2}{2m} + \frac{e^2}{4mc^2} \left[ \vec{A}^2 + \frac{2(\nabla(\vec{P}_d, \vec{a}))^2 + ((\vec{P}_d, \nabla)\vec{a})^2 - [\vec{P}_d, \text{rot}\vec{a}]^2}{m^2\omega^2} \right]$$

Ponderomotive potential depends on field polarization and motion direction either

## Relativistic corrections

Relativistic Hamiltonian

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}(\vec{r}) \cos(\omega t)}{c} \right)^2}$$

Expansion in  $\frac{v}{c}$

$$H = H_{nret} - \frac{\left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}(\vec{r}) \cos(\omega t)}{c} \right)^4}{8m^3 c^2}$$

relativistic and ponderomotive corrections

$$\Delta H_{rel} \propto \frac{e^2 (\vec{A}, \vec{P}_d)^2}{m^3 c^4}, \frac{\vec{P}_d^4}{m^3 c^2}, \frac{e^4 \vec{A}^4}{m^3 c^6}$$

where  $P_d \propto \frac{eA}{c}$

$$\Delta H_d \propto \frac{e^2}{m^3 c^2 \omega^2} (\nabla(\vec{P}_d, \vec{A}))^2$$

$$\frac{\Delta H_d}{\Delta H_{rel}} \propto \left( \frac{c}{\omega L} \right)^2$$

## Conclusion

- **Second order correction for the ponderomotive potential description have been found**
- **Drift motion is proved to be Hamiltonian in any order of perturbation theory**
- **The regular procedure to eliminate oscillatory terms from the Hamiltonian has been demonstrated**
- **The total particle-field energy exchange is proved to be exponentially small in the adiabaticity parameter  $v/(\omega L)$**

## Some properties of the generating function

$$S(\vec{r}, \vec{P}_d, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \cos(t) \vec{P}_d \vec{a}(\vec{r} + \vec{P}_d(t - \tau)) dt + \Psi(\vec{r} - \vec{P}_d \tau, \vec{P}_d)$$

**Fourier representation**  $S(\vec{r}, \vec{P}_d, \tau) = \text{Re} \left( -ie^{i\tau} \int \frac{\vec{P}_d \vec{a}_k e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}}{1 - \vec{k}\vec{P}_d} \right)$

**S is limited with the constant**

$$\begin{aligned} S(\vec{r}, \vec{P}_d, \tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} \cos(t) \vec{P}_d \vec{a}(\vec{r} + \vec{P}_d(t - \tau)) dt \leq \int_{-\infty}^{\tau} \left| \vec{P}_d \vec{a}(\vec{r} + \vec{P}_d(t - \tau)) \right| dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \vec{P}_d \vec{a}(\vec{r} + \vec{P}_d(t - \tau)) \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \vec{a}(\vec{e}_{\vec{P}} t) \right| dt < C \end{aligned}$$

- **1-D oscillatory coordinate in the third order of perturbation theory**

$$\begin{aligned}
 x_{\sim 3} = & -\cos(\omega t + \varphi) \left( \frac{e}{m\omega^2} E + \frac{25e^3}{16m^3\omega^6} EE'^2 + \frac{30e^3}{16m^3\omega^6} E^2 E'' - \frac{6HeE''}{m\omega^4} \right) + \cos(2\omega t + 2\varphi) \frac{e^2 EE'}{8m^2\omega^4} + \\
 & + 2\sin(\omega t + \varphi) \frac{e}{m\omega^3} E' \sqrt{2H - \frac{e^2 E^2}{2m^2\omega^2}} - \cos(3\omega t + 3\varphi) \frac{e^3}{144m^3\omega^6} (EE'^2 + 2E^2 E'') - \\
 & - \sin(2\omega t + 2\varphi) \frac{e^3}{8m^3\omega^5} (EE'' + 3E'^2) \sqrt{2H - \frac{e^2 E^2}{2m^2\omega^2}}
 \end{aligned}$$